TTY	FYS-1010 72041	17.11.2006
JKa	2.7 GRAVITAATIOVAKIO	176825 Kyrö Janne, kone IV 193627 Härkönen Antti, kone I

1. Johdanto

Työssä määritettiin gravitaatiovoiman määrittämisessä tarvittava gravitaatiovakio kokeellisesti. Vakion määrittäminen on hankalaa koekappaleiden välisen pienen gravitaatiovoiman vuoksi, joten työssä käytettiin tarkoitukseen kehitettyä laitetta, Cavendishin vaakaa. Kääntämällä laitteiston isoja palloja gravitaatiovoima saa pienet pallot liikkeelle. Pienten pallojen liikkeestä saatiin mittaustulokset tietokoneella jonka avulla määritimme gravitaatiovakion. Lopuksi määritimme virheen kokonaisdifferentiaalin avulla.

2. Työn taustalla oleva teoria

Nykymuotoinen gravitaatiolaki $F_{12} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^2}$, määritettiin jo vuonna 1686 Isaac Newtonin toimesta.
Kaavasta käy ilmi, että kahden kappaleen välille syntyy voima, joka on suoraan verrannollinen niiden massojen tuloon ja kääntäen verrannollinen massakeskiöiden etäisyyden neliöön. Vastaavansuuruinen voima esiintyy Newtonin kolmannen aksiooman mukaisesti kummassakin kappaleessa yhtä suurena.

Gravitaatiovakio voidaan määrittää Cavendishin vaa'an avulla. Vaaka koostuu kiertoalustalle asetetusta kahdesta isommasta massasta, joiden kanssa on sijoitettu samankeskeisesti kaksi pienempää massaa torsiolangan varaan. Torsiolankaan on kiinnitetty peili, jonka avulla voidaan mitata kiertymän suuruutta.

Torsiolankaa ja pienempiä massoja voidaan käsitellä kiertoheilurina. Tällöin siihen pätevät Newtonin toisen lain mukaiset yhtälöt. Koska työssä tapahtuvat liikenopeudet ovat pieniä, voidaan vaimennuksen vaikutus kulmataajuuteen olettaa häviävän pieneksi. Tämän mukaisesti torsiolangan direktiovakio voidaan ilmoittaa muodossa $D=2\ m_2 d^2\ \omega^2$, missä m_2 on heiluripallon massa ja d heilurivarren pituus.

Työssä gravitaatiovakio määritetään kahdella eri tavalla, loppupoikkeaman ja alkukiihtyvyyden perusteella. Loppu- ja alkupoikkeaman erotuksen ΔS, värähtelyjakson ajan T ja työssä käytetyn Cavendishin vaa'an vakioarvojen avulla saadaan määritettyä gravitaatiovakio kaavasta

$$G = \frac{\pi^2 \cdot b^2 \cdot d \cdot \Delta S}{m_1 \cdot T^2 \cdot L}$$

Kun gravitaatiovakio määritetään alkukiihtyvyyden avulla, voidaan torsiolangan aiheuttama vastamomentti jättää huomiotta, sillä se ei ole ehtinyt vielä kehittyä. Ainoastaan gravitaatiovoima antaa pienemmille palloille kiihtyvyyttä. Liikkeen kiihtyvyys määritetään torsiolankaan kiinnitetyn peilin heijastaman valopisteen kiihtyvyyden perusteella. Valopisteen kiihtyvyys voidaan määrittää mittausdatan muodostaman heilahdusfunktion alkuosalle sovitetun paraabelin avulla.
Gravitaatiovakiolle saadaan lauseke $G = \frac{2A \cdot d \cdot b^2}{m_1 \cdot 2L}$

3. Työn suoritus

Gravitaatiovakion määrittämiseksi käytimme Cavendishin vaakaa. Laitteessa on kiertoalusta, johon on kiinnitetty kaksi isompaa punnusta, kumpikin massaltaan m_1. Kiertoalusta ei pääse itsestään liikkumaan. Laitteen ylemmässä osassa on akselilla yhteen liitettynä kaksi pienempää punnusta. Akseli roikkuu kiertymisakselinsa kohdalta torsiolangassa. Torsiolankaan kiinnitetyn peilin heijastaman valopisteen avulla voidaan seurata torsiolangan kiertymistä ja pienempien massojen liikettä tietokoneavusteisesti.

Tietokoneavusteinen mittaus käynnistettiin ja isommat punnukset käännettiin alkuperäistä vastakkaiseen asemaan. Pienempimassaiset punnukset alkoivat kääntyä gravitaatiovoiman vaikutuksesta isompimassaisia punnuksia kohti. Mittausta jatkettiin noin tunnin ajan, jolloin käänsimme isompimassaiset punnukset jälleen vastakkaiseen asemaan ja keräsimme mittausdataa noin tunnin verran.

4. Mittaustulokset

Työssä käytettyyn Cavendishin vaakaan liittyviä arvoja:
b = 4,7cm
d = 5,0cm
L = 70cm
m_1=1,5kg
m_2=20g

1. kääntö

alkupoikkeama S_1=26,8 ± 0,1mm
loppupoikkeama S_{11}=47,4 ± 0,1mm

huippujen ajat:
t_1=360,0s t_2=967,5s t_3=1586,2s t_4=2193,7s

2. kääntö

alkupoikkeama S_2=47,4 ± 0,1mm
loppupoikkeama S_{22}=23,8 ± 0,1mm

huippujen ajat:
t_1=3892,5s t_2=4533,7s t_3=5118,7s t_4=5737,5s

Heilahdusfunktion alkuosalle sovitetun paraabelin vakiot:
A = 0,000788 mm/s^2
B = -0,0580 mm/s
C = 27,7 mm

5. Tulosten laskenta

5.1 Loppupoikkeaman avulla määritettävä gravitaatiovakio

Lasketaan gravitaatiovakio loppupoikkeaman avulla. Kaavassa ΔS on alku- ja loppupoikkeaman erotus. Värähtelyjakson aikana käytetään jakson keskiarvoa T. Kaavan muut vakiot ovat kokeessa käytetyn mittalaitteen arvoja.

<u>1. kääntö</u>

Huippujen ajat / s	Jakson kesto / s
360,0	
967,5	607,5
1586,2	618,7
2193,7	607,5

Jaksojen keskiarvo: T=611,23 s

$$G_1 := \frac{\pi^2 \cdot b^2 \cdot d \cdot \Delta S}{m_1 \cdot T_{ka}^{\,2} \cdot L} \qquad G_1 = 5.724 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

<u>2. kääntö</u>

Huippujen ajat / s	Jakson kesto / s
3892,5	
4533,7	641,2
5118,7	585,0
5737,5	616,8

Jaksojen keskiarvo: T=614,33 s

$$G_2 := \frac{\pi^2 \cdot b^2 \cdot d \cdot \Delta S}{m_1 \cdot T_{ka}^{\,2} \cdot L} \qquad G_2 = 6.465 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

5.2 Alkukiihtyvyyden avulla määritettävä gravitaatiovakio

Lasketaan gravitaatiovakio alkukiihtyvyyden avulla. Kaavassa A on heilahdusfunktion alulle sovitetun paraabelin vakio.

$$G_{alkuk} := \frac{2 \cdot A \cdot d \cdot b^2}{m_1 \cdot 2L} \qquad G_{alkuk} = 8.289 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

6. Virhearvio

Virheen määrittämiseksi käytämme kokonaisdifferentiaalia.

6.1 Loppupoikkeaman avulla lasketun gravitaatiovakion virhe

$\Delta T_{ka1} := 0.01\mathrm{s}$ $\quad \Delta T_{ka2} := 0.01\mathrm{s}$ $\quad \Delta A := 10^{-6}\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}^2}$

$\Delta b := 0.1\mathrm{cm}$ $\quad \Delta d := 0.1\mathrm{cm}$ $\quad \Delta L_1 := 1\mathrm{cm}$

$\Delta m_1 := 0.1\mathrm{kg}$ $\quad \Delta m_2 := 1\mathrm{gm}$ $\quad \Delta\Delta S := 0.1\mathrm{mm}$

1. kääntö:

$$\Delta G_1 := \left|\frac{\pi^2\cdot 2\cdot b\cdot d\cdot \Delta S_1}{m_1\cdot T_{ka1}{}^2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta b + \left|\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot \Delta S_1}{m_1\cdot T_{ka1}{}^2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta d + \left|\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot d}{m_1\cdot T_{ka1}{}^2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta\Delta S + \left|-\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot d\cdot \Delta S_1}{m_1{}^2\cdot T_{ka1}{}^2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta m_1 \ldots$$
$$+ \left|-2\cdot\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot d\cdot \Delta S_1}{m_1\cdot T_{ka1}{}^3\cdot L_1}\right|\cdot\Delta T_{ka1} + \left|-\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot d\cdot \Delta S_1}{m_1\cdot T_{ka1}{}^2\cdot L_1{}^2}\right|\cdot\Delta L_1$$

$$\Delta G_1 = 8.495\times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

2. kääntö:

$$\Delta G_2 := \left|\frac{\pi^2\cdot 2\cdot b\cdot d\cdot \Delta S_2}{m_1\cdot T_{ka2}{}^2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta b + \left|\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot \Delta S_2}{m_1\cdot T_{ka2}{}^2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta d + \left|\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot d}{m_1\cdot T_{ka2}{}^2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta\Delta S + \left|-\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot d\cdot \Delta S_2}{m_1{}^2\cdot T_{ka2}{}^2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta m_1 \ldots$$
$$+ \left|-2\cdot\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot d\cdot \Delta S_2}{m_1\cdot T_{ka2}{}^3\cdot L_1}\right|\cdot\Delta T_{ka1} + \left|-\frac{\pi^2\cdot b^2\cdot d\cdot \Delta S_2}{m_1\cdot T_{ka2}{}^2\cdot L_1{}^2}\right|\cdot\Delta L_1$$

$$\Delta G_2 = 9.554\times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

6.2 Alkukiihtyvyyden avulla lasketun gravitaatiovakion virhe

$$\Delta G_{ak} := \left|\frac{2\cdot d\cdot b^2}{m_1\cdot 2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta A + \left|\frac{2\cdot A\cdot b^2}{m_1\cdot 2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta d + \left|\frac{4\cdot A\cdot d\cdot b}{m_1\cdot 2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta b + \left|-\frac{2\cdot A\cdot d\cdot b^2}{m_1{}^2\cdot 2\cdot L_1}\right|\cdot\Delta m_1 + \left|-\frac{2\cdot A\cdot d\cdot b^2}{m_1\cdot 2\cdot L_1{}^2}\right|\cdot\Delta L_1$$

$$\Delta G_{ak} = 1.2\times 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

7. Yhteenveto

Saimme gravitaatiovakiolle seuraavat tulokset:

Menetelmä:	Tulos:
Loppupoikkeama, kääntö 1	(5,7 ± 0,9) $*10^{-11}m^3/kgs^2$
Loppupoikkeama, kääntö 2	(6,5 ± 1,0) $*10^{-11}m^3/kgs^2$
Alkukiihtyvyys	(8,3 ± 1,3) $*10^{-11}m^3/kgs^2$

Kirjallisuuden ilmoittama arvo gravitaatiovakiolle on 6,67 $*10^{-11}m^3/kgs^2$. Loppupoikkeamaan perustuvan määrityksen avulla pääsimme virherajoissa kirjallisuudessa esitettyyn tulokseen, mutta alkukiihtyvyysmenetelmällä saatu tulos on hieman kauempana. Jo ennen työn tekemistä oli tiedossa että gravitaatiovakion tarkka määritys on hyvin hankalaa. Tämä näkyy myös suurissa virherajoissa. Eräs hyvin todennäköinen virheen aiheuttaja oli tietokoneohjelman antaman mittausdatan tulkitseminen graafiselta näytöltä.

Lähteet

Jukka Valjakka: Fysiikan Työt 1

MAOL Taulukot, Keuruu 1996

Liitteet

Mittauspöytäkirja